Inégalité de Hoeffding (Ouv 2).

Thm : Soit (X_n) une suite de v.a.r. indépendantes centrées, bornée p.s. par (c_n) (i.e. $\forall n \in \mathbb{N}, |X_n| \leq c_n$ p.s.)

On note $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, $a_n = \sum_{k=1}^{n} c_k^2$.

$\forall \varepsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(|S_n| > \varepsilon) \leq 2\exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2a_n}\right)$

Lemme : Soit X v.a.r. centrée, $X \leq 1$ p.s. $\forall t \in \mathbb{R}, L_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX}) \leq e^{t^2/2}$

$\forall x \in [-1,1]$, $tx = \frac{1-x}{2}(-t) + \frac{1+x}{2}t$ donc par convexité, $e^{tx} \leq \frac{1-x}{2}e^{-t} + \frac{1+x}{2}e^{t}$.

L_X est bien définie (car X bornée), puis :

$L_X(t) \leq \frac{\mathbb{E}(1-X)}{2}e^{-t} + \frac{\mathbb{E}(1+X)}{2}e^{t} = \operatorname{ch}(t) \leq e^{t^2/2}$ en comparant les DSE.

Par indépendance des X_k :

$L_{S_n}(t) = \prod_{k=1}^{n} L_{X_k}(t) = \prod_{k=1}^{n} L_{\frac{X_k}{c_k}}(c_k t) \leq \prod_{k=1}^{n} e^{t^2 c_k^2/2} = e^{t^2 a_n/2}$

Soient $t, \varepsilon > 0$.

$\mathbb{P}(S_n > \varepsilon) = \mathbb{P}(e^{tS_n} > e^{t\varepsilon}) \leq \exp(-t\varepsilon + \frac{t^2}{2}a_n)$.

Pour $t = \frac{\varepsilon}{a_n}$, le minimum est réalisé : $\mathbb{P}(S_n > \varepsilon) \leq \exp(-\varepsilon^2/2a_n)$

Maintenant, $\mathbb{P}(|S_n| > \varepsilon) = \mathbb{P}(S_n > \varepsilon) + \mathbb{P}(-S_n > \varepsilon) \leq 2\exp(-\varepsilon^2/2a_n)$

en appliquant le raisonnement ci-dessus aux $-X_k$

Cor : Soit $\alpha > 0$. Si $\exists \beta > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*, a_n \leq n^{2\alpha-\beta}$, alors $\frac{S_n}{n^\alpha} \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} 0$.

Soit $\varepsilon > 0$.

Par Hoeffding, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(|S_n| > n^\alpha \varepsilon) \leq 2\exp\left(-\frac{n^\beta \varepsilon^2}{2}\right)$ car $a_n \leq n^{2\alpha-\beta}$

Or $\exp\left(-\frac{n^\beta \varepsilon^2}{2}\right) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc $\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(|S_n| > n^\alpha \varepsilon)$ converge, donc par Borel-Cantelli (I),

$\mathbb{P}(\limsup_{n\to+\infty} \{|S_n| > n^\alpha \varepsilon\}) = 0$.

Autrement dit, $\forall p \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \bigcap_{k\geq n} \left\{\frac{|S_k|}{k^\alpha} \leq \frac{1}{p}\right\}\right) = 1$.

i.e. $\forall p \in \mathbb{N}^*, \exists N_p$ négligeable, $\forall \omega \in N_p^c, \exists n \in \mathbb{N}, \forall k \geq n, \frac{|S_k(\omega)|}{k^\alpha} \leq 1/p$.

$N = \bigcup_{p\in\mathbb{N}^*} N_p$ est encore négligeable et

$\forall \omega \in N^c, \forall p \in \mathbb{N}^*, \exists n \in \mathbb{N}, \forall k \geq n, \frac{|S_k(\omega)|}{k^\alpha} \leq 1/p$, i.e. $\frac{S_n}{n^\alpha} \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} 0$